

بررسی توان های مختلف توپوگرافی در تعیین ژئوئید با EGM08¹

سهیل هجرتی

دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد واحد علوم تحقیقات شاهرود

چکیده:

با بکارگیری مدل های پتانسیل ثقل زمین (EGM) در فرمول استوکس می توان ارتفاع ژئوئید را محاسبه کرد. به منظور تعیین ارتفاع ژئوئید در داخل کره زمین، وجود توده های توپوگرافی باعث تولید یک میدان جاذبه می شوند. این میدان جاذبه فضای داخل کره زمین را غیر هارمونیک کرده و تعیین ارتفاع ژئوئید را با یک بایاس^۱ (خطا) همراه می کند. به منظور رفع این بایاس پتانسیل جرم توده های توپوگرافی در لایه های داخلی و خارجی زمین محاسبه می شوند. جهت محاسبه پتانسیل جرم توده های توپوگرافی در این لایه ها، ارتفاع توپوگرافی تا توان ششم از آن مورد بررسی و ارزیابی عددی قرار می گیرد. کمیت بدست آمده اثرات جرم توده های توپوگرافی نام دارد که با اعمال به فرمول استوکس باعث بهبود بخشیدن به ارتفاع ژئوئید تعیین شده با استفاده از مدل پتانسیل ثقل زمین می شود. در این مطالعه نتایج عددی حاکی از آن بود که اثرات توپوگرافی در توان اول و دوم ارتفاع توپوگرافی بیشترین مقدار در حدود میلی متر را دارند. مقدار این اثر از توان سوم تا ششم بسیار کاهش پیدا می کند و تاثیری در حدود میکرو متر و نانو متر بر روی ارتفاع ژئوئید دارند. مجموع اثر توان اول و دوم ارتفاع توپوگرافی برابر یک مقدار میانگین ۰/۰۱۸- متر بود که با استفاده از این مقدار در فرمول استوکس، ارتفاع ژئوئید نسبت به این اثرات تصحیح گردید و یک مقدار میانگین برابر با ۴/۸۲۱ متر برای ارتفاع ژئوئید تصحیح شده در منطقه مورد مطالعه بدست آمد.

واژه های کلیدی: مدل پتانسیل ثقل زمین، فرمول استوکس، ژئوئید، بایاس، اثرات جرم توده های توپوگرافی

¹ Earth Gravitational Model 2008



۱- مقدمه

از کاربرد های مهم مدل های پتانسیل ثقل زمین، تعیین ژئوئید می باشد که با یک بسط خارجی از سری هارمونیک های کروی نمایش داده می شوند. این بسط از سری هارمونیک های کروی در داخل زمین به دلیل وجود توده های توپوگرافی هارمونیک نمی باشد. در واقع توده های توپوگرافی در داخل زمین باعث ایجاد یک میدان جاذبه می شوند و از آنجاییکه سطح ژئوئید در داخل این توده ها قرار دارد، تحت تاثیر این میدان جاذبه قرار می گیرد و در تعیین ارتفاع ژئوئید باعث تولید بایاس می شوند. به طور کلی اثراتی که توده های توپوگرافی بر روی ارتفاع ژئوئید دارند اثرات توپوگرافی نام دارد. جهت تعیین دقیق ارتفاع ژئوئید می بایست این اثرات محاسبه شوند. با استفاده از مدل ضرایب ارتفاعی توپوگرافی که با توان های مختلف به سری هارمونیک های کروی بسط داده می شوند این اثرات محاسبه شده و جهت بهبود بخشیدن به ارتفاع ژئوئید در فرمول استوکس مورد استفاده قرار می گیرند.

در گذشته مطالعاتی در زمینه محاسبه اثرات توپوگرافی به منظور تعیین ارتفاع ژئوئید صورت گرفته بود که از جمله آنها می توان به مطالعات [۳، ۱، ۲] اشاره کرد. با تولید مدل EGM08 و استفاده این مدل در تعیین پتانسیل ثقل زمین، مطالعات دیگری نیز صورت گرفت [۵ و ۴]. این مطالعات به منظور ارتقاء دقت تعیین ارتفاع ژئوئید و بررسی اثرات جرم توده های توپوگرافی با توان های متفاوت از ارتفاع توپوگرافی انجام گردید که در این باره می توان به مطالعات [۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۱۲] اشاره داشت. بسط ارتفاع توپوگرافی به سری هارمونیک های کروی می تواند با توان های مختلفی از ارتفاع توپوگرافی انجام شود و در تعیین اثر جرم توده های توپوگرافی مورد ارزیابی قرار گیرد، در این مورد می توان مطالعه [۱۳] را نام برد. در این مطالعه اثر جرم توده های توپوگرافی تا توان دوم از ارتفاع آن محاسبه و به منظور تصحیح ارتفاع ژئوئید مورد استفاده قرار گرفت. نهادنچی و شوبرگ بسط ارتفاع توپوگرافی را تا توان سوم آن، جهت محاسبه اثرات توپوگرافی استفاده کردند و نتیجه کار، تحت عنوان اثرات کل توپوگرافی زمین معرفی شد [۱۴]. تنزار و همکاران و همچنین نواک اثر توپوگرافی را تا توان پنجم از آن مورد ارزیابی قرار دادند [۱۵ و ۸]. هیرت و کوهن با استفاده از مدل ارتفاع توپوگرافی که تا درجه و مرتبه ۲۱۶۰ تکمیل شده بود، اثرات جرم توده های توپوگرافی زمین را تا توان دهم ارتفاع توپوگرافی محاسبه، و پتانسیل آن را بدست آوردند [۱۶].

هدف این مطالعه محاسبه اثرات جرم توپوگرافی زمین در تعیین ارتفاع ژئوئید می باشد که این اثرات با بسط توان های مختلف از ارتفاع توپوگرافی به سری هارمونیک های کروی محاسبه می شوند. در این مطالعه ابتدا مدل ارتفاعی ژئوئید با استفاده از ضرایب پتانسیل ثقل زمین EGM08 تعیین می شود سپس اثر توان های اول تا ششم ارتفاع توپوگرافی، هر یک به صورت جداگانه مورد بررسی و ارزیابی عددی قرار می گیرند و به منظور بهبود بخشیدن به مدل ارتفاعی ژئوئید، استفاده می شوند.

۲- تعیین ارتفاع ژئوئید با استفاده مدل پتانسیل ثقل زمین EGM08

با استفاده از مدل های پتانسیل ثقل زمین، مولفه های طول موج های بلند تا متوسط میدان جاذبه زمین به صورت یک بسط از سری هارمونیک های کروی بدست می آیند و مولفه های طول موج های کوتاه آن پس از محاسبه فرمول استوکس از طریق داده های ثقل زمینی حاصل می گردد. در این مطالعه به منظور تعیین ارتفاع ژئوئید، از طول موج های کوتاه مدل پتانسیل ثقل زمین صرف نظر می شود و با بکار گیری فرمول استوکس برای آنومالی پتانسیل، ارتفاع ژئوئید به واسطه رابطه برونز تعیین می شود. در تعیین ژئوئید، آنومالی پتانسیل بر روی سطح ژئوئید مورد نیاز می باشد پس ارتفاع ژئودتیکی نقاط محاسبه در سیستم مختصات کروی برابر صفر خواهد بود. آنومالی پتانسیل از اختلاف پتانسیل ثقل واقعی با پتانسیل ثقل نرمال حاصل می گردد. از آنجاییکه پتانسیل ثقل واقعی و نرمال هر دو هارمونیک می باشند، لذا آنومالی پتانسیل ثقل زمین هارمونیک بوده و می توان آن را به سری هارمونیک های کروی بسط داد. در



نهایت، ارتفاع ژئوئید با استفاده از ضرایب مدل پتانسیل ثقل زمین EGM08 که به صورت یک بسط از سری هارمونیک های کروی تا درجه ۲۱۶۰ تکمیل شده است، به صورت زیر محاسبه و نمایش داده می شود:

$$N(R, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R\gamma} \sum_{n=2}^{nmax} \left(\frac{a}{R}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [(J_{nm}^T \cos m\lambda + K_{nm}^T \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta)] \quad (1)$$

رابطه فوق یک سری متناهی از بسط هارمونیک های کروی تا درجه n و مرتبه m در نقطه محاسباتی (R, θ, λ) از سیستم مختصات کروی می باشد. در این مطالعه از مدل پتانسیل ثقل زمین EGM08 که تا درجه و مرتبه ۲۱۶۰ تکمیل شده است استفاده می شود. GM ثابت گرانشی زمین، R شعاع متوسط زمین می باشد که سطح متوسط آب های آزاد را تقریب می کند، γ شتاب ثقل نرمال بر بیضوی، nmax بیشینه مقدار درجه مدل بوده که در اینجا برابر ۲۱۶۰ می باشد، J_{nm}^T و K_{nm}^T ضرایب هارمونیک های کروی تابع آنومالی پتانسیل زمین می باشند که از اختلاف بین ضرایب هارمونیک کروی تابع پتانسیل ثقل واقعی و نرمال حاصل می گردد، a فاکتور مقیاس متناسب با مدل پتانسیل زمین و $P_{nm}(\cos\theta)$ توابع لژاندر وابسته نرمالایز شده برای درجه n و مرتبه m می باشند. استفاده از فرمول استوکس مستلزم این می باشد که در فضای خارج ژئوئید هیچ جرمی وجود نداشته باشد ولی به دلیل وجود توده های توپوگرافی در بالا سطح ژئوئید و عدم اطلاع دقیق از چگالی آن، آنومالی پتانسیل در خارج از ژئوئید هارمونیک نبوده و رابطه (۱) جواب صحیحی نخواهد داشت. جرم توده های توپوگرافی موجود در بالای سطح ژئوئید باعث تولید بایاس در تعیین ارتفاع ژئوئید می شود. این موضوع یک تصحیحی را برای مولفه های تشکیل دهنده فرمول استوکس ایجاد می کند که با اعمال این تصحیح، نتیجه فرمول استوکس بهبود پیدا می کند [۲۳، ۲۴ و ۲۵].

۳- اثر جرم توپوگرافی زمین

از کاربرد های مهم مدل های پتانسیل ثقل زمین، تعیین ژئوئید می باشد. قسمت های اصلی ژئوئید قاره ای در زیر سطح توپوگرافی زمین واقع شده است. مدل های پتانسیل ثقل زمین با بسط سری خارجی هارمونیک های کروی نمایش داده می شوند. این بسط فقط در خارج توده های توپوگرافی زمین معتبر می باشد. در صورتی که بسط خارجی سری هارمونیک های کروی به داخل زمین انتقال داده شود (انتقال فروسو)، مسئله همگرایی مطرح می باشد. البته از آنجاییکه مدل های پتانسیل ثقل زمین تا یک سری متناهی بسط داده می شوند دیگر مسئله همگرایی وجود نخواهد داشت [۲۵ و ۲۶]. به هر حال استفاده از بسط سری هارمونیک های کروی به منظور محاسبه ارتفاع ژئوئید در حضور توده های توپوگرافی، با یک بایاس همراه خواهد بود. این بایاس ناشی از جرم توده های توپوگرافی و عدم اطلاع از چگالی آنها می باشد و اثر جرم توده های توپوگرافی زمین نام دارد. جهت رفع این بایاس و رسیدن به مقدار تصحیح شده رابطه استوکس، یک تصحیح بنام تصحیح توپوگرافی برای ضرایب پتانسیل ثقل زمین در نظر گرفته می شود [۱۳ و ۱۴]. تصحیحات توپوگرافی با استفاده از روش حذف- بازگشت^۲ (RR) جرم توده های توپوگرافی بدست می آیند. در این روش با برداشتن جرم توده های توپوگرافی یا انتقال آن بروی سطح ژئوئید به صورت یک لایه نازک، فرآیند حذف، و با بازگرداندن جرم توده های توپوگرافی، فرآیند بازگشت آن صورت می گیرد. در هر دو قسمت از روش فوق، پتانسیل لایه های توده های توپوگرافی (لایه های برداشته و بازگردانده شده) محاسبه می گردد. حذف و بازگشت جرم توده های توپوگرافی و محاسبه پتانسیل آنها، یک تصحیح از اثر توپوگرافی بر روی میدان ثقل زمین به روش مستقیم و غیر مستقیم می باشد [۱۷]. این روش با پذیرفتن شرط تراکم دوم هلمرت جهت کاهش میدان ثقل ناشی از جرم توده های توپوگرافی زمین صورت می گیرد [۲۹ و ۲۰]. بر طبق شرط تراکم دوم هلمرت، جرم توده های توپوگرافی زمین را می توان به صورت یک لایه بسیار نازک متراکم شده، بروی سطح ژئوئید قرار داد. این لایه بسیار نازک، لایه

² Remove - Restore



متراکم شده نام دارد و چگالی آن برابر با حاصل ضرب چگالی جرم توپوگرافی متوسط زمین، در ارتفاع هر نقطه از سطح توپوگرافی تا سطح ژئوئید می باشد [۳۲].

۳-۱- پتانسیل جرم توپوگرافی زمین و اثر آن بر روی ژئوئید

همان طور که ذکر شد سطح ژئوئید در داخل توده های توپوگرافی قرار دارد که کل این توده ها در داخل فضای یک کره (کره بریلیون) محدود می باشند. وجود این توده های توپوگرافی در داخل زمین باعث تولید یک میدان ثقل داخلی و خارجی می شود. میدان ثقل داخلی، ناشی از جرم توده های توپوگرافی می باشد که در پایین سطح ژئوئید قرار دارند و میدان ثقل خارجی نیز، ناشی از جرم توده های توپوگرافی می باشد که در بالای سطح ژئوئید قرار دارند. ارتفاع ژئوئید که از طریق مدل های پتانسیل ثقل زمین محاسبه می شود، تحت تاثیر این میدان ثقل قرار دارد. و تعیین آن را با بایاس همراه می کند. به جهت رفع این بایاس، پتانسیل جرم توده های توپوگرافی با استفاده از مدل های ارتفاعی توپوگرافی در لایه های داخلی و خارجی مورد محاسبه قرار داده می شود. مدل های ارتفاعی توپوگرافی با توان های مختلفی وجود دارد که به منظور محاسبه پتانسیل توپوگرافی زمین مورد استفاده قرار می گیرند و می توان آنها را با بسط به سری هارمونیک های کروی به صورت زیر نمایش داد [۱۶و۱۲]:

$$H_{nm}^P = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n (HC_{nm}^P \cos m + HS_{nm}^P \sin m) P_{nm}(\cos \theta) \quad (۲)$$

در رابطه فوق، H_{nm}^P ضرایب هارمونیک های کروی برای ارتفاع توپوگرافی با توان های $P=1,2,\dots,n_{max}$ و درجه n و مرتبه m ، n_{max} بیشینه توان مدل و HC_{nm}^P و HS_{nm}^P ضرایب کسینوسی و سینوسی هارمونیک های کروی مدل ارتفاع توپوگرافی می باشند. در این مطالعه مدل مورد استفاده برای ارتفاع توپوگرافی تا درجه و مرتبه ۷۲۰ تکمیل شده است. از آنجاییکه تابع ارتفاع و پتانسیل توپوگرافی زمین با یکدیگر یک ارتباط غیر خطی دارند لذا معمولاً پتانسیل جرم توده های توپوگرافی در داخل یک سری هارمونیک های کروی با توان های مختلف از ارتفاع توپوگرافی بسط داده می شود این بسط برای لایه های داخلی و خارجی توده های توپوگرافی زمین به صورت زیر نمایش داده می شود [۲۰]:

$$V_{ext}^t(r, \Omega) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n (V_{ext}^t)_{nm} Y_{nm}(\Omega) \quad r \geq R \quad (۳)$$

$$V_{int}^t(r, \Omega) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{n_{max}} \left(\frac{r}{R}\right)^n \sum_{m=-n}^n (V_{int}^t)_{nm} Y_{nm}(\Omega) \quad r \leq R \quad (۴)$$

در روابط فوق $V_{int}^t(r, \Omega)$ و $V_{ext}^t(r, \Omega)$ به ترتیب پتانسیل جرم توده های توپوگرافی لایه خارجی و داخلی می باشند، Ω زاویه کروی است که برابر با $(\theta, \lambda) = \Omega$ می باشد، (r, Ω) مختصات نقطه محاسباتی در سیستم مختصات کروی، r فاصله ژئوسنتریک نقطه روی سطح توپوگرافی، $(V_{ext}^t)_{nm}$ و $(V_{int}^t)_{nm}$ به ترتیب ضرایب هارمونیک کروی پتانسیل جرم توده های توپوگرافی برای لایه های خارجی و داخلی با درجه n و مرتبه m و $Y_{nm}(\Omega)$ توابع هارمونیک کروی نرمالایز شده می باشد. با در نظر گرفتن توان اول تا ششم از ارتفاع توپوگرافی، می توان ضرایب بسط سری هارمونیک های کروی را برای جرم توده های توپوگرافی بدست آورد این ضرایب برای لایه های خارجی و داخلی توپوگرافی به صورت بسط زیر نمایش داده می شود [۱۸و۲۰،۳۰]:

$$(V_{ext}^t)_{nm} = \frac{3}{2n+1} \frac{\rho^t}{\rho^e} \left[\frac{1}{R} H_{nm} + \frac{(n+2)}{2R^2} H_{nm}^2 + \frac{(n+2)(n+1)}{6R^3} H_{nm}^3 + \frac{(n+2)(n+1)n}{24R^4} H_{nm}^4 + \frac{(n+2)(n+1)(n-1)}{120R^5} H_{nm}^5 + \frac{(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)}{720R^6} H_{nm}^6 \right] \quad (۵)$$

$$(V_{int}^t)_{nm} = \frac{3}{2n+1} \frac{\rho^t}{\rho^e} \left[\frac{1}{R} H_{nm} - \frac{(n-1)}{2R^2} H_{nm}^2 + \frac{(n-1)n}{6R^3} H_{nm}^3 - \frac{(n-1)n(n+1)n}{24R^4} H_{nm}^4 + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{120R^5} H_{nm}^5 - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{720R^6} H_{nm}^6 \right] \quad (۶)$$



با استفاده از فرمول دوم برونز مقدار اثر جرم توده های توپوگرافی بر ارتفاع ژئوئید δN برای یک نقطه محاسباتی در سیستم مختصات کروی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\delta V(r, \Omega) = V_{int}^t(r, \Omega) - V_{ext}^t(r, \Omega) \quad (7)$$

و از طریق رابطه زیر مقدار ارتفاع ژئوئید نسبت به اثرات جرم توده های توپوگرافی تصحیح می گردد:

$$\delta N(R, \Omega) = \frac{\delta V(R, \Omega)}{\gamma(\theta)} \quad (8)$$

$$N^c(R, \Omega) = N(R, \Omega) - \delta N(R, \Omega) \quad (9)$$

$N^c(R, \Omega)$ ارتفاع ژئوئید تصحیح شده برای یک نقطه محاسباتی در سیستم مختصات کروی می باشد.

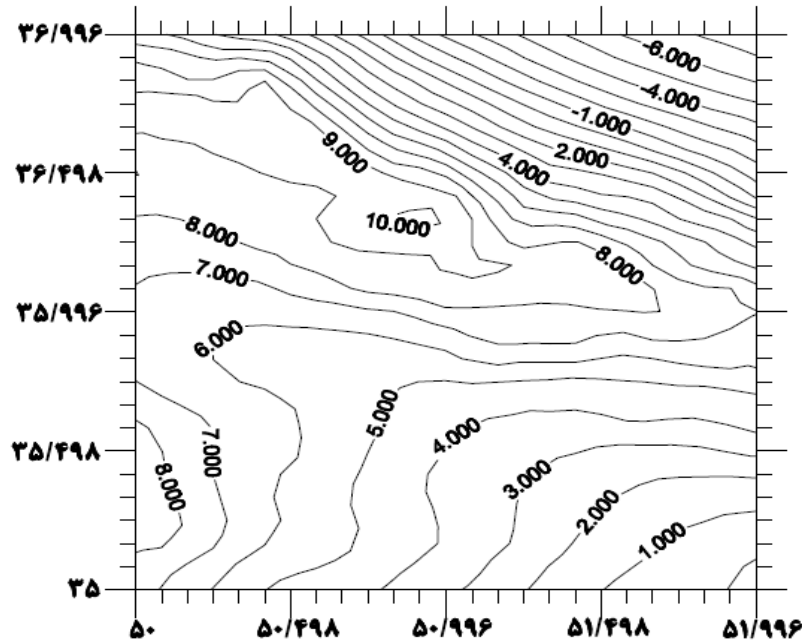
۴- محاسبات عددی

منطقه مورد مطالعه محدود در عرض جغرافیایی ۳۵ تا ۳۷ درجه و طول جغرافیایی ۵۰ تا ۵۲ درجه در ایران قرار دارد. تراکم داده ها به صورت ۵ دقیقه کمائی می باشد. جهت محاسبه ارتفاع ژئوئید، از ضرایب مدل پتانسیل ثقل زمین EGM08 تا درجه ۲۱۶۰ استفاده گردید. با توجه به اینکه هدف مطالعه، بررسی اثرات توده های توپوگرافی بر تعیین ارتفاع ژئوئید می باشد، لذا می بایست آنومالی پتانسیل بر روی سطح ژئوئید محاسبه شود به همین منظور ارتفاع ژئودتیکی نقاط محاسباتی در منطقه مورد مطالعه برابر با صفر در نظر گرفته شد. ارتفاع ژئوئید از طریق رابطه (۱) محاسبه گردید. پارامتر های موجود در روابط محاسباتی بر طبق سیستم ژئودتیک جهانی ۱۹۸۴ میلادی^۳ (WGS84) به صورت $GM = 3986004.418 \times 10^8 \text{ m}^3\text{S}^{-2}$ ، $R=6371 \text{ Km}$ ، $a = 6378137 \text{ m}$ ، در نظر گرفته شد [۲۱]. ضرایب هارمونیک کروی برای آنومالی پتانسیل K_{nm}^T و J_{nm}^T و شتاب ثقل نرمال γ_Q برای محدوده فوق با تراکم مورد نظر محاسبه گردید [۱۹]. جدول و شکل (۱) ارتفاع ژئوئید محاسبه شده برای منطقه مورد مطالعه را نشان می دهد.

جدول (۱): ارتفاع ژئوئید محاسبه شده در منطقه مورد نظر، واحد متر

بیشینه	کمینه	میانگین	انحراف معیار
۱۰/۴۲۸	-۷/۶۱۸	۴/۸۰۳	۳/۶۶۳

³ World Geodetic System 1984



شکل(۱): ارتفاع ژئوئید محاسبه شده تا درجه ۲۱۶۰ از مدل EGM08، واحد متر
محور افق: طول جغرافیایی - محور قائم: عرض جغرافیایی، واحد درجه
فاصله منحنی میزان- اصلی: ۵ متر، فرعی: ۱ متر

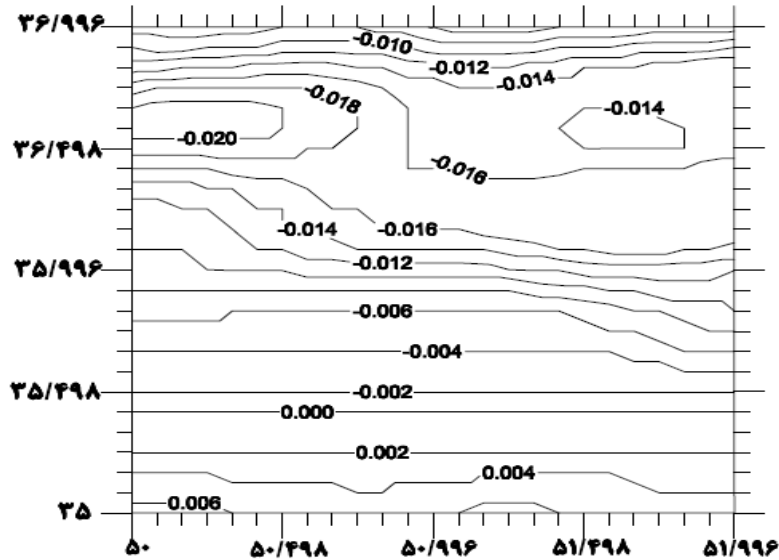
بر طبق جدول و شکل فوق، بالاترین مقدار ارتفاع ژئوئید در محدوده عرض جغرافیایی $36^{\circ}20'$ و طول جغرافیایی $50^{\circ}55'$ قرار دارد که برابر $10/428$ متر می باشد همچنین پایین ترین مقدار ارتفاع ژئوئید نیز در محدوده عرض جغرافیایی 37° و طول جغرافیایی 52° قرار دارد که برابر $7/618$ متر می باشد. همانطور که قبلا بیان شد، ارتفاع ژئوئید دارای بایاس ناشی از اثرات جرم توده های توپوگرافی می باشد و این اثرات می بایست جهت بهبود ارتفاع ژئوئید محاسبه شوند. به همین منظور ضرایب ارتفاعی توپوگرافی از طریق رابطه (۲) برای توانهای $P=1,2,\dots,6$ بدست آمد. این ضرایب از مدل ارتفاعی توپوگرافی تا درجه و مرتبه 720 تکمیل شده است. به جهت محاسبه پتانسیل لایه داخلی و خارجی جرم توده های توپوگرافی از طریق روابط (۳) و (۴)، ابتدا ضرایب هارمونیک کروی پتانسیل آنها، از طریق بسط های روابط (۵) و (۶) بدست آمد، سپس از طریق رابطه (۷) اختلاف این لایه ها که پتانسیل توپوگرافی باقیمانده نام داشت، محاسبه گردید. کمیت بدست آمده از طریق رابطه برونز (۸) به اثرات جرم توده های توپوگرافی بر روی ارتفاع ژئوئید تبدیل شد. این اثرات به صورت جداگانه برای تمامی توان های ارتفاع توپوگرافی مورد محاسبه و ارزیابی قرار گرفت. نتایج در جدول (۲) نشان داده شده است.

جدول(۲): اثر توان های اول تا ششم توپوگرافی بر روی ارتفاع ژئوئید، واحد متر

توان	بیشینه	کمینه	میانگین	انحراف معیار
۱	$0/007$	$-0/021$	$-0/008$	$0/007$
۲	$-0/001$	$-0/019$	$-0/010$	$0/004$
۳	$0/004 \times 10^{-3}$	$-0/004 \times 10^{-3}$	$-0/006 \times 10^{-4}$	$0/001 \times 10^{-3}$
۴	$0/002 \times 10^{-3}$	$-0/002 \times 10^{-3}$	$-0/002 \times 10^{-5}$	$0/008 \times 10^{-4}$
۵	$0/006 \times 10^{-6}$	$-0/004 \times 10^{-6}$	$0/007 \times 10^{-8}$	$0/001 \times 10^{-6}$
۶	$0/008 \times 10^{-6}$	$-0/008 \times 10^{-6}$	$0/002 \times 10^{-7}$	$0/004 \times 10^{-6}$

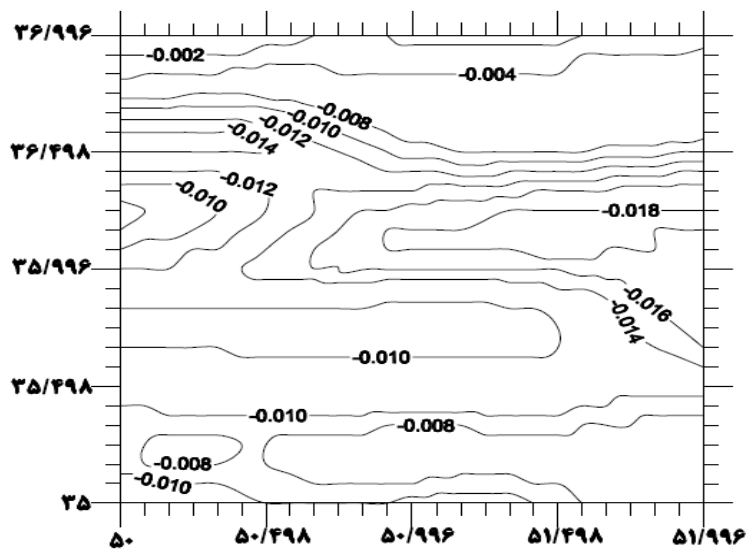


بر طبق جدول (۲) بیشترین مقدار اثر توپوگرافی برابر با $0/007$ متر مختص توان اول توپوگرافی در منطقه مورد مطالعه می باشد که در محدوده عرض جغرافیایی 35° و طول جغرافیایی 50° قرار دارد. کمترین مقدار این توان از اثر توپوگرافی نیز در محدوده عرض جغرافیایی $36^{\circ}35'$ و طول جغرافیایی $50^{\circ}10'$ قرار دارد که برابر با $-0/021$ متر می باشد. شکل (۲) اثر این توان را نمایش می دهد.



شکل (۲): اثر توان اول توپوگرافی تا درجه و مرتبه 720 ، واحد متر
محور افق: طول جغرافیایی - محور قائم: عرض جغرافیایی، واحد درجه
فاصله منحنی میزان - اصلی: $0/01$ متر، فرعی: $0/002$ متر

در توان دوم از توپوگرافی، شاهد کاهش مقدار اثر توپوگرافی نسبت به توان اول آن هستیم. بیشترین مقدار این اثر برابر با $-0/001$ متر و کمترین مقدار آن برابر $-0/019$ متر می باشد. شکل (۳) اثر توان دوم از توپوگرافی را نشان می دهد.



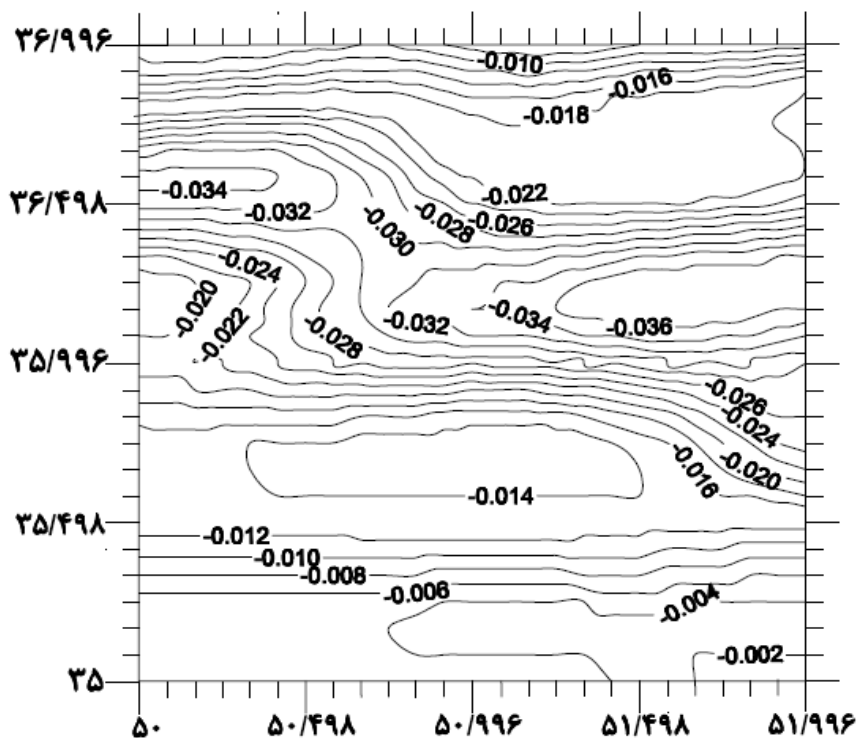
شکل (۳): اثر توان دوم توپوگرافی تا درجه و مرتبه 720 ، واحد متر
محور افق: طول جغرافیایی - محور قائم: عرض جغرافیایی، واحد درجه
فاصله منحنی میزان - اصلی: $0/01$ متر، فرعی: $0/002$ متر



طبق نتایج بدست آمده مقدار اثرات توپوگرافی با افزایش توان آنها، کاهش پیدا می کند و اثرات توپوگرافی توان های دوم به بعد تأثیری در حدود میکرومتر و نانومتر بر ارتفاع ژئوئید دارند و از آنجاییکه در این مطالعه مقادیر عددی تا سه رقم اعشار معنی دار مورد نیاز می باشد، در نتیجه، توان های سوم تا ششم توپوگرافی تأثیری بر ارتفاع ژئوئید نخواهند داشت. جهت تصحیح ارتفاع ژئوئید نسبت به این اثرات، از مجموع اثرات توان های اول و دوم توپوگرافی استفاده کردیم. شکل (۴) مجموع اثرات فوق و جدول (۳) نتایج عددی آن را نمایش می دهند.

جدول (۳): مجموع اثر توان اول و دوم توپوگرافی بر روی ارتفاع ژئوئید، واحد متر

بیشینه	کمینه	میانگین	انحراف معیار
-۰/۰۰۱	-۰/۰۳۸	-۰/۰۱۸	۰/۰۱۰



شکل (۴): مجموع اثرات توان اول و دوم توپوگرافی تا درجه و مرتبه ۷۲۰، واحد متر

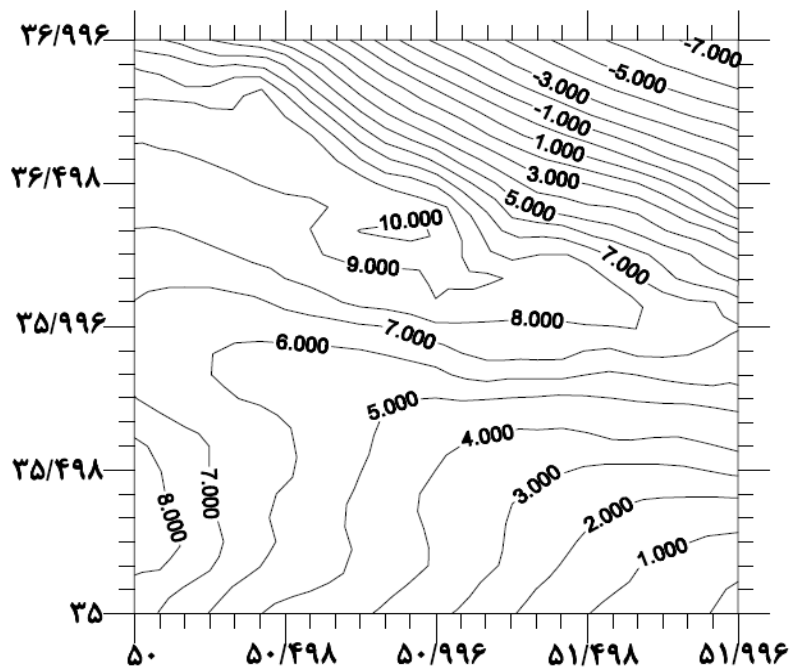
محور افق: طول جغرافیایی - محور قائم: عرض جغرافیایی، واحد درجه

فاصله منحنی میزان - اصلی: ۰/۰۱ متر، فرعی: ۰/۰۰۲ متر

با توجه به جدول و شکل فوق بیشترین مقدار توپوگرافی در محدوده عرض جغرافیایی 35° و طول جغرافیایی 52° قرار دارد و کمترین مقدار آن در محدوده عرض جغرافیایی $36^{\circ}15'$ و طول جغرافیایی $51^{\circ}40'$ می باشد. به منظور تصحیح ارتفاع ژئوئید، با استفاده از رابطه (۹) مجموع اثرات توان اول و دوم از ارتفاع توپوگرافی را به مدل ژئوئید تعیین شده در منطقه مورد مطالعه اعمال نموده و باعث تصحیح آن نسبت به اثرات توپوگرافی می شویم. در شکل (۵) ارتفاع ژئوئید تصحیح شده و در جدول (۴) نتایج عددی آن نمایش داده شده است.

جدول (۴): ارتفاع ژئوئید تصحیح شده نسبت به مجموع اثرات توان اول و دوم توپوگرافی، واحد متر

بیشینه	کمینه	میانگین	انحراف معیار
۱۰/۴۵۹	-۷/۶۰۹	۴/۸۲۱	۳/۶۶۷



شکل(۵): ارتفاع ژئوئید تصحیح شده نسبت به مجموع اثرات توان اول و دوم توپوگرافی ، واحد متر
محور افق: طول جغرافیایی - محور قائم: عرض جغرافیایی، واحد درجه
فاصله منحنی میزان- اصلی: ۵ متر ، فرعی: ۱ متر

بر طبق جدول و شکل فوق، بیشترین مقدار برای ارتفاع ژئوئید تصحیح شده برابر $10/459$ متر در محدوده عرض جغرافیایی $36^{\circ}20'$ و طول جغرافیایی $50^{\circ}55'$ و کمترین مقدار آن برابر $7/609$ - متر در محدوده عرض جغرافیایی 37° و طول جغرافیایی 52° در منطقه مورد مطالعه حاصل گردید.

۵- بحث و نتیجه گیری

در این مطالعه با استفاده از ضرایب مدل پتانسیل ثقل زمین EGM08 و فرمول استوکس توانستیم ارتفاع سطح ژئوئید را در منطقه مورد نظر تا درجه و مرتبه 2160 تعیین کنیم. پتانسیل جرم توپوگرافی از طریق ضرایب بسط ارتفاع توپوگرافی به سری هارمونیک های کروی که تا درجه و مرتبه 720 تشکیل شده بود، محاسبه گردید. اثرات جرم توده های توپوگرافی تا توان ششم از ارتفاع آن مورد بررسی و ارزیابی قرار داده شد. نتایج عددی یک مقدار میانگین برابر با $4/803$ متر برای ارتفاع ژئوئیدی را نشان می داد که نسبت به اثرات توپوگرافی تصحیح نشده بود. در محاسبه اثر توان های مختلف توپوگرافی به این نتیجه رسیده شد، که توان اول و دوم توپوگرافی بیشترین اثر را بر ارتفاع ژئوئید دارند. و مقدار این اثر برای توان های سوم تا ششم بسیار کوچک می باشد. و تاثیری بر ارتفاع ژئوئید ندارند. در نهایت با محاسبه مجموع اثرات توان اول و دوم، مقدار میانگینی برابر با $0/018$ - متر بدست آمد که با اعمال این مقدار به فرمول استوکس، ارتفاع ژئوئید نسبت به جرم توده های توپوگرافی تصحیح گردید و به مقدار میانگینی برابر با $4/821$ متر برای ارتفاع ژئوئید تصحیح شده در منطقه مورد مطالعه دست یافتیم.

مراجع

[1] P.Vanicek, M.Najafi, Z.Martinec, L.Harrie, LE.Sjoberg, "Higher order reference field in the generalized Stokes-Helmert's scheme for geoid computation", Journal of Geodesy, Vol.70, pp.176-182,1995.



- [2] L.E.Sjoberg, "Topographic effects by the Stokes-Helmert method of geoid and quasi-geoid determinations", *Journal of Geodesy*, Vol.74(2), pp. 255-268, 2000.
- [3] B.Heck, "On Helmert methods of condensation" *Journal of geodesy*, Vol.77, pp.155-170.2003
- [4] N. K. Pavlis, S. A. Holmes, et al. "An Earth gravitational model to degree 2160: EGM08", General Assembly of the European Geosciences Union. Vienna, Austria, 2008
- [5] N. K. Pavlis, , S. A. Holmes, S. C. Kenyon, and J. K. Factor , "The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) ", *Journal of geophysic. Res.* 117, B04406, doi:10.1029/2011JB008916,2012
- [6] A.A.Makhloof, "The use of topographic-isostatic mass information in geodetic applications", PhD dissertation, Inst. für Geod. und Geoinf. Der Univ. Bonn, Bonn, Germany,2007
- [7] P.Novák, "High resolution constituents of the Earth gravitational field", *Surv. Geophys*, Vol.31(1), pp.1-21,2010a
- [8] P.Novak, "Direct modelling of the gravitational field using harmonic series", *Acta Geodyn. Geomater*, Vol.7(1), pp.35-47,2010b.
- [9] M.Bagherbandi, "An isostatic Earth crustal model and its applications", PhD dissertation, Div. of Geodesy and Geoinformation, R. Inst. of Technol. Stockholm.2011.
- [10] G.Balmino, N. Vales, S. Bonvalot, and A. Briais , "Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies", *Journal of Geodesy*, Vol.86(7), pp. 499-520, 2012.
- [11] C.Gruber, P. Novak, F. Flechtner, and F. Barthelmes , "Derivation of the topographic potential from global DEM models", in *International Association of Geodesy Symposia*, Springer, Berlin, in press.2012
- [12] M. Bagherbandi, and L. E. Sjoberg , "A synthetic Earth gravity model based on a topographic-isostatic model", *Study. Geophysic. Geodesy*, in press,2012.
- [13] L.E. Sjoberg, "On the error of spherical harmonic development of gravity at the surface of the Earth", Report. 257, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus,1997.
- [14] H. Nahavandchi, L.E. Sjoberg, "Terrain correction to power H3 in gravimetric geoid determination". *Journal Geodesy*, Vol.72, pp.124-135,1998.
- [15] R. Tenzer, P. Novak, et al, "Far-zone gravity field contributions corrected for the effect of topography by means of molodensky's truncation coefficients." *Studia Geophysica et Geodaetica*, Vol 55(1), pp.55-71,2011.
- [16] C.Hirt and M.Kuhn, "Evaluation of high-degree series expansions of the topographic potential to higher-order powers", *Journal of Geophysic.Res.*, 117, B12407, 2012.
- [17] H. Nahavandchi, "Two different method of geoidal determination using a spherical harmonic representation of the geopotential, topographic corrections and the height anomaly-geoid height difference". *Journal of Geodesy*, Vol.76, pp.345-352, 2002.
- [18] M. Eshagh , "On satellite gravity gradiometry", Doctoral dissertation in Geodesy, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden,2009a
- [19] W.AHeiskanen, H. Moritz *Physical geodesy*. WH Freeman, San Francisco, 1967.
- [20] Z. Martinec, "Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid". *Lecture Notes in Earth Sciences* no. 73. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1998.
- [21] H. Moritz, " Geodetic reference system 1980", *Bull Geodesy* Vol.62, pp.348-358,1988.



- [22] L.E. Sjoberg, "The terrain effect in geoid computation from satellite-derived geopotential models", 1996a.
- [23] L.E. Sjoberg, " On the error of analytical continuation in physical geodesy". Journal of Geodesy, Vol.70, pp.724±730, 1996b.
- [24] L.E. Sjoberg, "On the downward continuation error at the Earth's surface and the geoid of satellite-derived geopotential models". Jeod: submitted, 1996c.
- [25] C. Jekeli, "The downward continuation to the Earth's surface of the truncated spherical and ellipsoidal harmonic series of gravity and height anomalies. Rep 327, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus, 1981.
- [26] C. Jekeli, "A numerical study of the divergence of spherical harmonic series of the gravity and height anomalies at the Earth's surface. Bull Geod 57:10–28, 1982.
- [27] L.E. Sjoberg, "The Terrain Correction in Geoid Computation from Satellite Derived Geopotential models, in TAITA-GEOD Report 1036, Division of Geodesy, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1994
- [28] L.E. Sjoberg, "On the quasigeoid to geoid separation. Manuscr Geod 20:182–192, 1995.
- [29] F.R Helmert, "*Die mathematischen und physicalischen Theorien der hoheren Geodesy*", Vol.2, 1884.
- [30] P. Vanicek, Z. Martinec, "The Stokes–Helmert scheme for the evaluation of a precise geoid". Manuscr Geod 19:119–128, 1994.



Evaluation of multiple topographic powers in geoid determination using EGM08

Hejrati.S

Student of Master Science Geodesy, Department of Engineering, Azad University of Science and Research, Shahrood, Iran

Abstract.

By employing earth gravitational models(EGM) for the Stokes' formula, can be calculated the geoid height. To determination of geoid height within the earth, exist of topographical masses creates a gravitational field. The gravitational field causes the inside of earth be non-harmonic and determination the geoid height is associated with a bias. In order to eliminate this bias, the potential of external and internal topographical masses of earth are calculated. To calculate the potential of topographical masses this layers, the topographic height be numerically evaluated up to the sixth powers elevation. The obtained quantity is topographic effects which by applying the Stokes formula causes improved the geoid height determination using geopotential model. In this study Numerical results showed that topographic effects of the first and second powers elevation are the maximum about millimeters. The value of this effect is much reduced from the third to sixth powers and the impact of micrometers and nanometers on the geoid height. The total of first and second powers of the topographic effects equal to the mean value of -0.018 meter, that use this value to Stokes formula, geoid height be corrected from the topographic effects and obtained the mean value of 4.821 meter for geoid height of correction in the study area.

Key words: Gravitational models - Stokes' formula – Geoid – Bias - Topographic effects

Correspondence Address: Tehran, Saadat Abad, mokhaberat, peyvand street, alley 14, No 14,
Postal code: 1981933477

Tel: +982122136882 / +989119866676
e-mail:hejrati.sohey1@gmail.com