

مقایسه روش‌های المان محدود و تفاضل محدود در بررسی معیار عددی دوران متوسط نووزیلو در ایران

رحیم جوادی آذر^{۱*}، بهزاد وثوقی^۲

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۲- دانشیار گروه مهندسی ژئودزی - دانشکده مهندسی نقشه برداری - دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

چکیده:

در این تحقیق به بررسی یک معیار عددی جدید به نام نووزیلو برای محاسبه دوران متوسط با دو روش تفاضل محدود و المان محدود در سیستم مختصات کارتیزین پرداخته شده است. برای رسیدن به این هدف ابتدا تنسورهای استرین و دوران خطی، در سیستم مختصات کارتیزین محاسبه شده و سپس معیار دوران متوسط نووزیلو با استفاده از مؤلفه‌های تنسورهای استرین و دوران خطی استخراج می‌شود. در این تحقیق از مشاهدات ژئودتیکی (GPS) سال ۲۰۰۸ که در چهار ایپوک سه‌ماهه صورت گرفته، استفاده شده است. نتایج بدست آمده از معیار دوران متوسط نووزیلو در سیستم مختصات کارتیزین نشان‌دهنده آن است که در روش تفاضل محدود بیشترین دوران راستگرد ($2/951 \text{ deg/Myr}$) در طول و عرض جغرافیایی تقریبی ($27/39^\circ$ و $62/31^\circ$)، و همچنین بیشترین میزان دوران چپگرد ($-2/455 \text{ deg/Myr}$) در طول و عرض جغرافیایی تقریبی ($29/23^\circ$ و $56/58^\circ$)، رخ داده است. نتایج حاصل از معیار دوران متوسط نووزیلو در سیستم مختصات کارتیزین نشان‌دهنده آن است که در روش المان محدود نیز بیشترین دوران راستگرد ($12/846 \text{ deg/Myr}$) در طول و عرض جغرافیایی تقریبی (29° و 60°)، و همچنین بیشترین میزان دوران چپگرد ($-9/333 \text{ deg/Myr}$) در طول و عرض جغرافیایی تقریبی ($35/41^\circ$ و $54/29^\circ$)، رخ داده است. با مقایسه‌ای که بین نتایج دو روش و مطالعات قبل انجام گرفت، نتایج حاکی از برتری روش تفاضل محدود نسبت به روش المان محدود در محاسبه این معیار عددی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: تنسور استرین خطی، تنسور دوران خطی، معیار دوران متوسط نووزیلو



۱- مقدمه

یکی از کاربردهای گسترده آنالیز تغییرشکل در ژئودزی و ژئودینامیک آنالیز تغییرشکل زمین می‌باشد. در مکانیک محیط‌های پیوسته تغییرشکل عبارت است از هرگونه تغییر در شکل و ساختار هندسی یک جسم که می‌تواند شامل انتقال، دوران و یا تغییرشکل باشد. مدل محیط پیوسته مدلی است که دارای ویژگی‌های زیر باشد: اولاً این‌که توزیع ماده در داخل این محیط کاملاً پیوسته و در سرتاسر جسم در نظر گرفته می‌شود (محیط پیوسته). ثانیاً تمام روابط ریاضی که به توصیف وضعیت مکانیکی و تغییر در این وضعیت مکانیکی می‌پردازند، توابعی تنسوری از متغیرهای مکان و زمان در نظر گرفته می‌شوند.

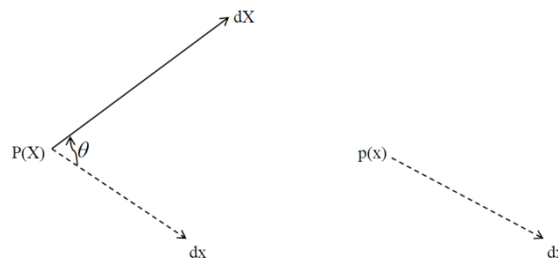
در سالیان اخیر، تکنیک‌های ژئودزی فضایی منابع جدید با دقت بالا و قابل اعتمادی از اطلاعات را جهت تعیین موقعیت ژئودتیک مهیا کرده است که جهت آشکارسازی و کمی‌سازی تغییرشکل‌های سطح زمین به کار رفته‌اند. ترکیب این مشاهدات با مدل‌های تحلیلی به بررسی مکانیزم گسل پرداخته است [۱].

نیلفروشان و همکاران در سال ۲۰۱۲ با استفاده از داده‌های GPS بین سال‌های ۱۹۹۷ تا ۲۰۱۱، سرعت افقی و میدان نرخ استرین در دریاچه وانرن^۱ (در کشور سوئد) را محاسبه کردند [۲]. موسوی و همکاران در سال ۲۰۱۳ با استفاده از داده‌های ۴۷ ایستگاه GPS در شمال شرق ایران میدان سرعت را محاسبه نموده و با استفاده از آن به توصیف دوران صلب جنوب دریای خزر حول قطب اولر پرداختند [۳]. والپراسدورف و همکاران در سال ۲۰۱۴ با مطالعه ۹۲ ایستگاه GPS طی ۱۱ سال در قسمت شرق ایران، این منطقه را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند [۴]. آن‌ها با استفاده از این داده‌ها به مطالعه نرخ لغزش گسل در این مناطق و همچنین دوران بلوک‌ها پرداختند.

در این مقاله با استفاده از روابط خطی تنسورهای کرنش و دوران، و همچنین بردارهای سرعت بدست آمده از ایستگاه‌های سیستم تعیین موقعیت جهانی (GPS^۲) موجود در منطقه مورد مطالعه، به محاسبه کرنش و دوران در سیستم مختصات کارترین پرداخته می‌شود. سپس با استفاده مؤلفه‌های حاصل از تنسورهای کرنش و دوران به محاسبه یک معیار عددی جدید برای دوران متوسط به نام نووژیلو با دو روش المان محدود و تفاضل محدود پرداخته می‌شود. در نهایت هم مقایسه‌ای بین نتایج به عمل می‌آید.

۲- تئوری دوران متوسط نووژیلو

در شکل (۱) بردار dX در راستای X بعد از تغییرشکل به یک بردار جدید dx در راستای x تبدیل می‌شود. زاویه θ که از دوران dX در طول تغییرشکل ایجاد می‌شود از رابطه (۱) بدست می‌آید [۵]:



شکل ۱: وضعیت جاری و مرجع بردار dX

^۱Vanern

^۲ Global Positioning System



$$\cos \theta = \frac{dX \cdot dx}{dXdX} = \frac{G_{KL} dX^K g_L^I dx^I}{dXdX} = \frac{g_{kl} dx^k g_L^I dX^L}{dXdX} \quad (1)$$

g_{kl} و G_{KL} : تنسور متریک همگشت، dX^K و dx^k مختصات کارتزین بردارهای dX و dx .

اگر مقدار $0 \leq \theta < \pi$ در نظر بگیریم، بردارهای واحد N و n در X و x در طول dX و dx از روابط زیر بدست می‌آید:

$$n^k = \frac{dx^k}{dx} \quad (2)$$

$$N^K = \frac{dX^K}{dX} \quad (3)$$

بنابراین می‌توان نوشت [5]:

$$\cos \theta = G_{KL} g_L^I N^K n^I = g_{kl} g_L^I n^k N^L \quad (4)$$

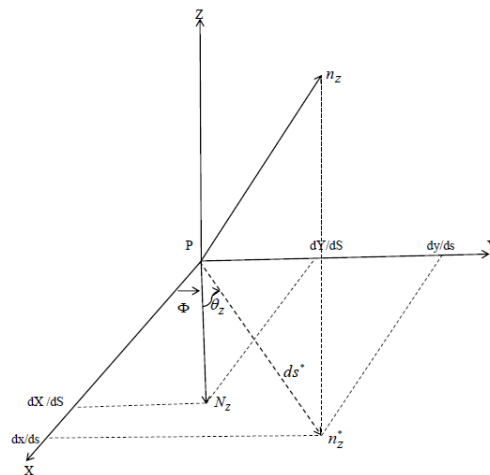
این رابطه را می‌توان به‌طور کامل با استفاده از ترم‌های N^K و n^k نمایش داد، اگر رابطه (1) به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\cos \theta = \frac{G_{KL} g_L^I x_{,M}^I (dX^K / dX)(dx^M / dx)}{dx / dX} \quad (5)$$

در معادله (5) از رابطه $\Lambda_{(N)} = \lambda_{(n)} = \frac{dx}{dX}$ استفاده شده است.

میزان دوران توضیح داده شده با رابطه (5) پیچیده و دشوار است. در سال ۱۹۴۸ معیاری برای دوران متوسط، توسط

آقای نوژیلو مطرح شد که اهمیت تنسورهای دوران \tilde{R}_{KL} و \tilde{r}_{kl} را نشان می‌دهد.



شکل ۲: تصویر دوران بردار N_z در صفحه



فرض کنیم N_z بردار واحد در صفحه XY از چهارچوب مرجع X, Y, Z در نقطه P باشد. بعد از تغییر شکل N_z به n_z در P تبدیل می‌شود. حال اگر n_z را در صفحه XY تصویر نماییم، زاویه بین n_z^* و N_z (θ_z) از رابطه زیر بدست می‌آید [۵]:

$$\begin{aligned} \tan(\Phi + \theta_z) &= \frac{\tan \Phi + \tan \theta_z}{1 - \tan \Phi \tan \theta_z} = \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{y_{,X} dX + y_{,Y} dY}{x_{,X} dX + x_{,Y} dY} \end{aligned} \quad (۶)$$

با جایگزین کردن $dY = ds \sin \Phi$ و $dX = ds \cos \Phi$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tan \theta_z &= \frac{y_{,X} \cos^2 \Phi + (y_{,Y} - x_{,X}) \sin \Phi \cos \Phi - x_{,Y} \sin^2 \Phi}{x_{,X} \cos^2 \Phi + y_{,Y} \sin^2 \Phi + (y_{,X} + x_{,Y}) \sin \Phi \cos \Phi} = \\ &= \frac{-\tilde{R}_{XY} + \tilde{E}_{XY} \cos 2\Phi + \frac{1}{2}(\tilde{E}_{YY} - \tilde{E}_{XX}) \sin 2\Phi}{1 + \frac{1}{2}(\tilde{E}_{YY} + \tilde{E}_{XX}) - \frac{1}{2}(\tilde{E}_{YY} - \tilde{E}_{XX}) \cos 2\Phi + \tilde{E}_{XY} \sin 2\Phi} \end{aligned} \quad (۷)$$

قسمت دوم رابطه (۷) با جایگذاری روابط زیر در قسمت اول بدست می‌آید:

$$y_{,X} = v_{,X} = \tilde{E}_{XY} - \tilde{R}_{XY} \quad (۸)$$

$$y_{,Y} = 1 + v_{,Y} = 1 + \tilde{E}_{YY}, \dots \quad (۹)$$

رابطه (۷) در Φ با پریود π متناوب است. بنابراین θ_z در ناحیه $0 \leq \theta_z \leq \pi$ به جز در زوایای $\theta_z = \pi$ و $\theta_z = 0$ تعریف شده است. نوزیلو مقدار زیر را به عنوان میزان دوران معین نمود [۵]:

$$\langle \tan \theta_z \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tan \theta_z(\Phi) d\Phi \quad (۱۰)$$

با توجه به قسمت دوم رابطه (۷) و (۱۰) می‌توان نوشت [۵]:

$$\begin{aligned} \langle \tan \theta_z \rangle &= -\frac{1}{2\pi} \tilde{R}_{XY} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Phi}{1 + \frac{1}{2}(\tilde{E}_{XX} + \tilde{E}_{YY}) + \frac{1}{2}(\tilde{E}_{XX} - \tilde{E}_{YY}) \cos 2\Phi} \right. \\ &\left. + \tilde{E}_{XY} \sin 2\Phi \right) = \frac{-\tilde{R}_{XY}}{\sqrt{(1 + \tilde{E}_{XX})(1 + \tilde{E}_{YY}) - \tilde{E}_{XY}^2}} \end{aligned} \quad (۱۱)$$

۳- روش المان محدود

در روش اجزای محدود، محدوده مساله به نواحی و محدوده‌های کوچک‌تر تقسیم می‌شود که آن‌ها را اجزاء و یا المان می‌نامند. المان‌های مجاور بدون همپوشانی به هم متصل می‌شوند به نحوی که هیچ‌گونه فضای خالی بین المان‌های مجاور وجود نداشته باشد. شکل المان‌ها تا حد ممکن به ساده‌ترین شکل ممکن در نظر گرفته می‌شود. فرآیند



افرازبندی یک محدوده به مجموعه‌ای از المان‌ها، یعنی ایجاد شبکه، امروزه با استفاده از برنامه‌های رایانه‌ای، تا حد زیادی یک فرآیند خودکار محسوب می‌شود [۶].

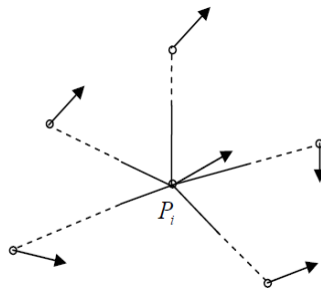
روش اجزای محدود به دنبال یک مدل آزمایشی است که به‌عنوان جواب تقریبی برای تابع ناشناخته به کار رود. مدلی که تنها به‌صورت تقریبی در معادله کلی و شرایط مرزی صدق نماید. مدل آزمایشی به شکل جمع تعداد متناهی از توابع به فرم کلی زیر ارائه و مورد استفاده قرار می‌گیرد [۶].

$$\begin{aligned} \tilde{U}(Q^j; A) = & F_0(Q^j) + A_1 F_1(Q^j) + \\ & A_2 F_2(Q^j) + \dots + A_N F_N(Q^j) \end{aligned} \quad (12)$$

در این رابطه، Q^j نشان‌دهنده تمامی متغیرهای مستقل موجود در مساله موردنظر است. توابع $F_i(Q^j)$ توابع معلومی هستند که توابع آزمایشی و یا توابع پایه نامیده می‌شوند [۶]. در این روش با توجه به موقعیت رئوس موجود که به‌طور نامنظم، پخش شده‌اند سعی می‌شود تا حد امکان، مثلث‌ها، نزدیک به مثلث متساوی‌الاضلاع باشند. این روش افراز دارای جوابی منحصر به فرد است. به عبارت دیگر به ازای P نقطه، تنها یک مثلث‌بندی دلونی وجود دارد [۱]. با توجه به ویژگی‌های مثلث‌بندی دلونی، می‌توان آن را به‌عنوان بهترین مثلث‌بندی از لحاظ هندسی معرفی کرد.

۴- روش تفاضل محدود

در روش تفاضلی فرض می‌شود که مؤلفه‌های تغییر شکل در هر نقطه (ایستگاه شبکه) بوسیله نقاط مجاور که توسط مشاهدات به این نقطه متصل هستند، قابل تعریف می‌باشند. شکل (۳) نشان‌دهنده ساختار پایه در روش تفاضل محدود می‌باشد.



شکل ۳: ساختار پایه در روش تفاضلی محدود [۷].

در حالت سه‌بعدی می‌توان مؤلفه‌های بردارهای جابجایی مربوط به ایستگاه i ام را بصورت زیر نوشت [۷]:

$$u_i = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j x_i + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j y_i + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j z_i + a_j + r_{ji}$$

$$v_i = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_j x_i + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_j y_i + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_j z_i + b_j + r_{ji}$$

$$w_i = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j x_i + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_j y_i + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_j z_i + c_j + r_{ji}$$

$$i = 1, \dots, n+1$$

$$j = 1, \dots, m$$

(۱۳)



که در آن m تعداد کل نقاط شبکه، n تعداد نقاط متصل به نقطه j ام، $(a, b, c)_j^T$ مقادیر ثابت، u_i, v_i, w_i مؤلفه-های بردار جابجایی نقطه i ام و $r_i = (r_{ui}, v_{ui}, w_{ui})$ بردار باقیمانده‌های این جابجایی‌ها می‌باشند [۷].

$$\begin{aligned} u_i &= \hat{X}_i^{(2)} - \hat{X}_i^{(1)} \\ v_i &= \hat{Y}_i^{(2)} - \hat{Y}_i^{(1)} \\ w_i &= \hat{Z}_i^{(2)} - \hat{Z}_i^{(1)} \end{aligned} \quad (14)$$

مختصات‌های سرشکن شده نقطه i ام شبکه در دو مقطع زمانی اول و دوم هستند. در رابطه (۱۳) تمامی دوازده پارامتر دارای اندیس j ، مجهولات مسأله می‌باشند. همچنین در این رابطه ضرائب از تفاضل مختصات نقطه j ام از مختصات i ام بدست می‌آیند. با نوشتن سه معادله فوق برای نقطه مورد نظر و نقاط مجاورش، $3(n+1)$ معادله ماتریسی زیر بدست می‌آید:

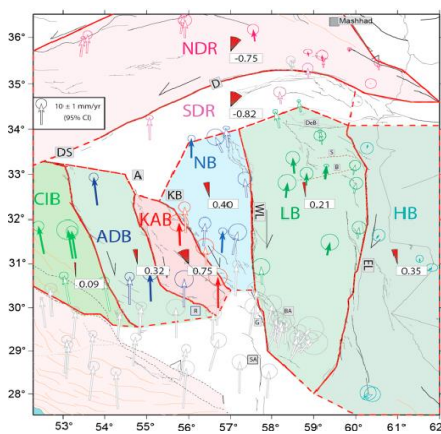
$$d_j = A_j X_j + r_j \quad (15)$$

که در رابطه فوق A_j ماتریس مربوط به نقطه j ام، X_j بردار پارامترهای تغییرشکل مجهول مربوط به این نقطه، برداری شامل جابجایی‌های مربوط به نقطه مورد نظر و نقاط مجاورش در دو مقطع زمانی مختلف و نیز بردار باقیمانده‌ها می‌باشد.

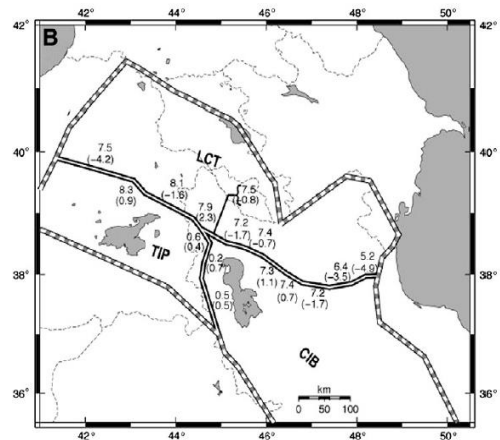
۵- منطقه مورد مطالعه

در این مقاله محدوده مورد مطالعه، کشور ایران بوده و از مشاهدات ژئودتیکی سال ۲۰۰۸ که در چهار اپوک سه‌ماهه در مناطق مختلف کشور ایران در ایستگاه‌های GPS صورت گرفته، استفاده شده‌است.

تصویر نرخ لغزش گسل (mm/yr) در شمال غرب ایران در شکل (۴-الف) نمایش داده شده‌است. همچنین نرخ دوران بلوک‌ها در شرق ایران در مرکز هر بلوک در شکل (۴-ب) توسط والپراسدورف و همکاران به نمایش درآمده است.



(ب)



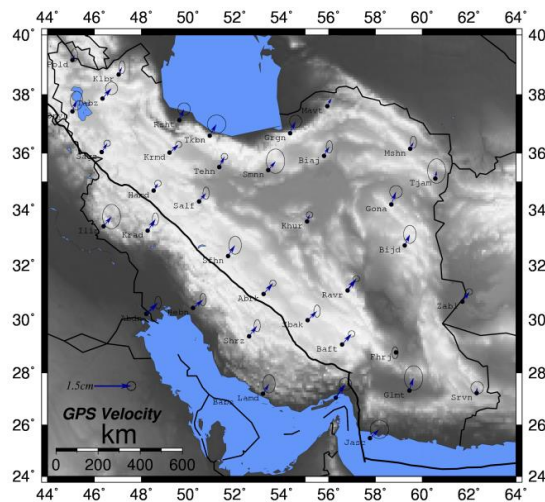
(الف)

شکل ۴-الف: تصویر نرخ لغزش گسل (mm/yr) در شمال غرب ایران، عددهای بدون پرانتز نرخ امتدادلغز هستند که علامت مثبت نشان‌دهنده راست‌گرد بودن می‌باشد [۸]. ب: نرخ دوران بلوک‌ها بر حسب درجه در میلیون سال در مرکز هر بلوک [۴].



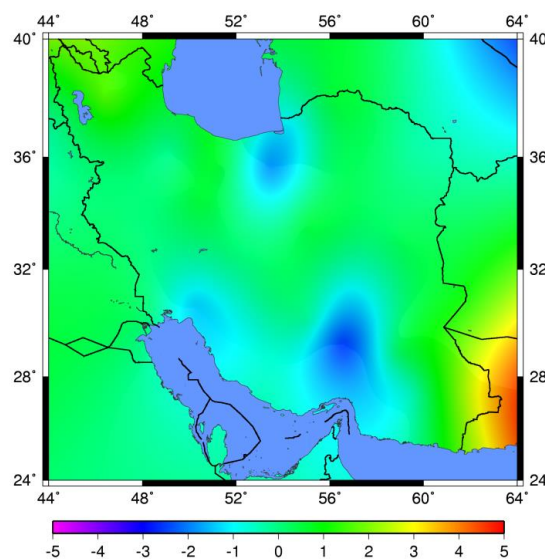
۶- نتایج عددی

مختصات ایستگاه‌ها به همراه میدان سرعت آن‌ها و تعیین میدان استرین مهم‌ترین پارامترها در تعیین تغییر شکل سطحی پوسته می‌باشند. برآورد اولیه از میدان سرعت پوسته زمین مخصوصاً در مناطق زلزله‌خیز و در نزدیکی گسل‌ها می‌تواند اطلاعات با ارزشی را از ساختار ژئودینامیکی و نیز چگونگی فعالیت گسل‌ها در اختیار قرار دهد. امروزه این امر توسط ایستگاه‌های شبکه‌های ژئودینامیکی انجام می‌گیرد. با استفاده از مختصات ایستگاه‌ها و پردازش سری زمانی آن‌ها می‌توان به برآورد اولیه‌ای از میدان سرعت دست یافت. در ایران سازمان نقشه برداری کشور متولی پردازش و ارائه بردارهای سرعت مربوط به ایستگاه‌های شبکه ژئودینامیک می‌باشد. شکل (۵) بردارهای سرعت پوسته در منطقه ایران را نسبت به صفحه اوراسیا به همراه بیضی خطای ۹۵ درصد نشان می‌دهد.



شکل ۵: بردارهای سرعت در ایران با داده‌های مشاهدات ژئودتیک سال ۲۰۰۸.

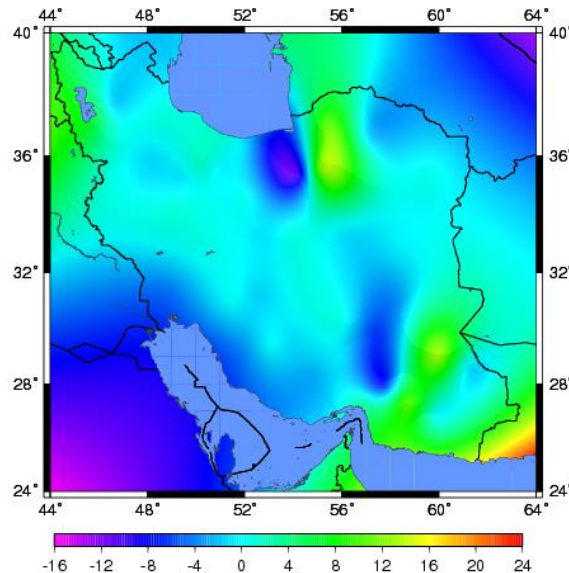
شکل (۶) معیار عددی دوران متوسط نووژیلو با روش تفاضل محدود را در سیستم مختصات کارتزین با استفاده از مشاهدات ژئودتیک سال ۲۰۰۸ نشان می‌دهد.



شکل ۶: تصویر دوران حاصل از معیار عددی نووژیلو (deg/Myr) در سیستم مختصات کارتزین با روش تفاضل محدود با استفاده از مشاهدات ژئودتیک (GPS) سال ۲۰۰۸ که در چهار ایوک سه‌ماهه صورت گرفته (دوران مثبت نشانگر دوران ساعت‌گرد می‌باشد).



شکل (۷) معیار عددی دوران متوسط نووژیلو با روش المان محدود را در سیستم مختصات کارتیزین با استفاده از مشاهدات ژئودتیکی سال ۲۰۰۸ نشان می‌دهد.



شکل ۷: تصویر دوران حاصل از معیار عددی نووژیلو (deg/Myr) در سیستم مختصات کارتیزین با روش المان محدود با استفاده از مشاهدات ژئودتیکی (GPS) سال ۲۰۰۸ که در چهار ایوک سه ماهه صورت گرفته (دوران مثبت نشانگر دوران ساعتگرد می‌باشد).

از مقایسه دو شکل (۶) و (۷) با اشکال (۴-الف) و (۴-ب) مشاهده می‌شود که نتایج معیار دوران متوسط حاصل از روش تفاضل محدود تطابق بیشتری به نتایج مطالعات قبل که راجع به دوران بلوک‌ها در مناطق مختلف ایران و همچنین دوران در نقاط ایستگاه‌های GPS صورت گرفته، دارد.

۷- نتیجه‌گیری

مؤلفه‌های تنسور استرین و تنسور دوران خطی در سیستم مختصات کارتیزین با دو روش المان محدود و تفاضل محدود با استفاده از مشاهدات ژئودتیکی سال ۲۰۰۸ محاسبه شد، و پس از آن معیار عددی دوران متوسط نووژیلو با هر دو روش استخراج گردید. نتایج حاصل نشان داد که روش المان محدود در کشور ایران برای محاسبه معیار عددی دوران متوسط نووژیلو نمی‌تواند روش خوبی محسوب شود. در نتایج نشان داده شد که محاسبه این معیار عددی با روش تفاضل محدود مطابقت بیشتری با نتایج مطالعات قبل دارد.

مراجع

- [1] M. R. Jafari, "An Investigation in the Change of the Curvature of the Earths Crust in Iran Using the GPS Results", M. Sc. Thesis, K. N. Toosi University of Technology, 2009.
- [2] F. Nilfouroushan, P. Hodacs, H. Koyi, L. Sjoberg, "Geodetic horizontal velocity and strain rate fields around Lake Vanern (SW Sweden) derived from GPS measurements between 1997 and 2011." Proc. EGU General Assembly Conference, 04/2012.
- [3] Z. Mousavi, A. Walpersdorf, R.T. Walker, F. Tavakoli, E. Pathier, H. Nankali, F. Nilfouroushan, Y. Djamour, "Global Positioning System Constraints on the active tectonics of NE Iran and the South Caspian Region." Earth and Planetary Science Letters, 08/2013.
- [4] A. Walpersdorf, I. Manighetti, Z. Mousavi, F. Tavakoli, M. Vergnolle, A. Jadidi, D. Hatzfeld, A. Aghamohammadi, A. Bigot, Y. Djamour, H. Nankali, M. Sedighi, "Present-day kinematics and fault slip rates in eastern Iran, derived from 11 years of GPS data", J.Geophys. Res. Solid Earth. 119, PP. 1359-1383, 2014.



- [5] A.C. Eringen, "Nonlinear Theory of Continuous Media." McGraw-Hill. New York, 1962.
- [6] B. Voosoghi, "Intrinsic Deformation Analysis of the Earth Surface Based on 3-Dimensional Displacement Fields Derived From Space Geodetic Measurements", PhD thesis, Institute of Geodesy, University at Stuttgart, 2000.
- [7] Z. Mousavi, "Regionalization and Extraction of Seismic Moment Rate in Iran Based on GPS Observation", M. Sc. Thesis, K. N. Toosi University of Technology, 2006.
- [8] Y. Djamour, P. Vernant, H. Nankali, F. Tavakoli, "NW Iran-eastern Turkey present-day kinematics: Results from the Iranian permanent GPS network", Earth and Planetary Science Letters, 370, 27-34, 2011.