

## مقایسه روشهای عددی و تبدیل فوریه سریع در انتقال فرسوی داده‌های جاذبی

نیما زیارتی خلیلی<sup>۱\*</sup>، مهدی گلی<sup>۲</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد ژئودزی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات شاهرود، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شاهرود، ایران

### چکیده:

تعیین ژئوئید بروش جاذبی نیازمند به انتقال داده های جاذبی از سطح زمین بروی ژئوئید است. در کنار روش کولوکیشن، معکوس انتگرال پواسن یک روش مرسوم برای انتقال فرسو است. این مطالعه به بررسی دو روش ۱- انتگرال گیری عددی و ۲- تبدیل فوریه برای حل انتگرال پواسن جهت انتقال فرسوی آنومالی های جاذبی می پردازد. روشهای عددی یک روش کارا و قابل تغییر برای انتقال فرسوی داده های متوسط و نقطه است. از سوی دیگر از تبدیل فوریه سریع برای انتقال فرسو داد های جاذبی در ژئوفیزیک استفاده فراوان می شود. خطای این دو روش، روی یک منطقه آزمون در ایران با داده های شبیه سازی شده از مدل EGM08 برآورد شد. نتایج نشان داد که روش انتگرال گیری عددی خطای کمتری در انتقال فرسوی داده ها ایجاد می کند. علاوه براین نقصان زیاد دقت تبدیل فوریه در مناطق کوهستانی، استفاده از این روش را در این مناطق دچار چالش می کند.

واژه‌های کلیدی: داده های جاذبی، انتقال فرسو، ژئوئید، EGM08.



## ۱- مقدمه

مسئله تعیین ژئوئید در ژئودزی فیزیکی به عنوان یک مسئله معکوس، دارای جواب یکتا نیست. زیرا داده های اندازه گیری شده، در روی سطح زمین و یا بالاتر از آن قرار دارند. برای حل مسایل مقادیر مرزی بمنظور تعیین ژئوئید ابتدا باید آنومالی های جاذبی به سطح ژئوئید منتقل شود. این فرایند را انتقال رو به پایین (فروسو) می نامند. انتگرال پواسن یک ابزار ریاضی برای این منظور است که تا کنون بارها برای انتقال فرسوی داده های پتانسیل در ژئودزی و ژئوفیزیک مورد استفاده قرار گرفته است. رجوع کنید به [۱، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۳، ۱۷، ۱۶، ۱۸ و ۱۹].

مشاهدات جاذبی در سطح زمین به صورت گسسته در اختیار هستند. در نتیجه گسسته سازی معادله انتگرال پواسن امری اجتناب ناپذیر است. با توجه به ماهیت آنومالی های جاذبی در سطح زمین و مورد نیاز در سطح ژئوئید، مدل های مختلفی در گسسته سازی انتگرال پواسن استفاده می شود. در مطالعه [۱۸] از مدل گسسته سازی نقطه - نقطه انتگرال پواسن (انتقال آنومالی های نقطه ای در سطح زمین به آنومالی های نقطه ای در سطح ژئوئید) استفاده شد. مطالعه [۱۳] مدل گسسته سازی متوسط - متوسط انتگرال پواسن (انتقال آنومالی های متوسط در سطح زمین به آنومالی های متوسط در سطح ژئوئید) را معرفی کردند. در تحقیق [۴] بررسی جامعی در انتقال رو به پایین آنومالی های جاذبی با ماهیت های نقطه ای و متوسط انجام پذیرفت. بر اساس مطالعات [۴] شعاع بهینه انتگرال گیری پواسن برابر یک درجه و بهترین مدل برای گسسته سازی انتگرال پواسن، مدل متوسط-متوسط بود. مطالعه [۱۷] پیشنهاد استفاده از مدل گسسته سازی نقطه-متوسط (انتقال آنومالی های نقطه ای در سطح زمین به آنومالی های متوسط در سطح ژئوئید) را به جای مدل گسسته سازی متوسط-متوسط برای داده های جاذبی کانادا مطرح ساخت. استفاده از مدل های گسسته سازی نقطه-متوسط و متوسط-متوسط مستلزم محاسبه متوسط کرنل پواسن است. محاسبه متوسط کرنل کروی پواسن در حالت پیوسته در سیستم مختصات کروی امکان پذیر نیست. در مطالعه [۸] نشان داده شد که با تقریب صفحه ای و در سیستم مختصات کارتزین، متوسط کرنل کروی پواسن دارای جواب تحلیلی است.

اغلب در ژئوفیزیک از انتگرال پواسن برای انتقال رو به بالا (فراسو) بعنوان یک فیلتر پایین گذر برای حذف اثرات ناخواسته استفاده می شود [۱۴]. برای این منظور از تبدیل فوریه برای حل معادلات انتگرالی پواسن استفاده می گردد [۱۲]. در این مطالعه کارایی و سرعت حل مستقیم انتگرال پواسن در مقابل روش تبدیل فوریه در انتقال رو به پایین آنومالی های جاذبی بررسی می شود.

## ۲- انتگرال پواسن

انتگرال پواسن، بر اساس حل مسئله مقدار مرزی دیریکله برای هر تابع هارمونیک در فضای  $r > R$  در سیستم مختصات کروی عبارتست از [۱۵]:

$$V(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} K^s(r, \psi, R) V(R, \Omega') d\Omega' \quad (1)$$

که  $K^s(r, \psi, R)$  کرنل کروی پواسن است.

$$K^s(r, \psi, R) = R \frac{(r^2 - R^2)}{d^3(r, \psi, R)} \quad (2)$$



$r = R + h$  و  $V(r, \Omega)$  به ترتیب توابع هارمونیک در سطح زمین و ژئوئید است. شعاع متوسط ژئوئید،  $R$  شعاع متوسط ژئوئید،  $r = R + h$  شعاع ژئوسنتریک،  $\Omega = (\varphi, \lambda)$ ، فاصله کروی برابر با  $\cos \psi = \cos \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi \sin \varphi' \cos(\lambda - \lambda')$  و  $d = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr \cos \psi}$  فاصله است.

معادله انتگرالی رابطه (۱) نشان می‌دهد که تابع  $V(r, \Omega)$  خارج از کره به شعاع  $R$  به طور منحصر به فرد از مقادیر معلوم مرزی در سطح آن  $V(R, \Omega)$  تعیین می‌شود. در حالت معکوس می‌توان با حل معادله انتگرالی پواسن از مقادیر  $V(r, \Omega)$  مقادیر متناظر آنها روی کره را محاسبه کرد.

معادله انتگرالی (۱) یک معادله انتگرال فردهلم نوع اول است که در حالت پیوسته دارای جواب نیست [۲]. با این وجود ممکن است که با گسسته سازی مساله در ابعاد معین و محدود، مساله دارای جواب یکه و پایدار باشد [۱۶]. در این مطالعه انتقال رو به پائین آنومالی‌های جاذبی با تراکم ۵ دقیقه کمانیمورد مطالعه قرار می‌گیرد که نشان داده شده است معادلات متناظر با آن‌ها یک مسئله پایدار است [۸].

اغلب شتاب ثقل در روی سطح زمین بصورت پراکنده و نامنظم اندازه‌گیری می‌شود. این اطلاعات طی پروسه درونیابی به مقادیر آنومالی‌های متوسط روی یک شبکه منظم تبدیل می‌شوند. با توجه به استفاده از روش المان محدود در تعیین ژئوئید با انتگرال استوکس، برای حل این انتگرال نیاز به آنومالی‌های متوسط است. لذا در گسسته سازی انتگرال پواسن باید مقادیر متوسط آنومالی‌های جاذبی به مقادیر متناظر متوسط روی ژئوئید تبدیل شود. مدل گسسته سازی متوسط-متوسط انتگرال (۱) عبارتست از [۱۱]:

$$\overline{\Delta g}_i = \frac{R}{4\pi r_i} \sum_{j=1}^n \overline{K}(r_i, \psi_{ij}, R) \overline{\Delta g}_j \cos \varphi_j \Delta \varphi \Delta \lambda \quad (3)$$

که در اینجا  $\overline{\Delta g}_i$  و  $\overline{\Delta g}_j$  به ترتیب آنومالی‌های متوسط در سطح زمین و ژئوئید،  $\Delta \varphi$  و  $\Delta \lambda$  به ترتیب ابعاد سلول‌های انتگرال گیری روی ژئوئید است. همچنین  $\bar{r}_i = R + \bar{h}_i$  متوسط ارتفاع سلول زمینی و  $\bar{K}$  متوسط کرنل پواسن روی سلول ژئوئید است:

$$\overline{K}(r_i, \psi_{ij}, R) = \int_{C_j} K(r_i, \psi_{ij}, R) d\Omega' \quad (4)$$

### ۳- تبدیل فوریه

بر اساس حل مساله مقدار مرزی دیریخله در سیستم مختصات کارتیزین، معادله انتگرال پواسن برای انتقال رو به بالای یک تابع هارمونیک مانند  $V(x, y, z)$  که در فضای  $z > z_0$  هارمونیک است، عبارتست از:

$$V(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{\Omega} K^p(x', y', z_0, x, y, z) V(x', y', z_0) dx' dy' \quad (5)$$

که در این رابطه  $K^p$  کرنل صفحه ای پواسن برابر  $K^p = d^{-3} = ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{-\frac{3}{2}}$  است.

تبدیل فوریه دو بعدی تابع  $V(x', y', z_0 = \text{cte})$  عبارتست از [۶]:

$$V(p, q) = \iint V(x, y) e^{-2\pi i(px + qy)} dx dy \quad (6)$$



که در اینجا  $i = \sqrt{-1}$  عدد موهومی و  $(p, q)$  عددموجهای تابع  $V$  در راستای  $(x, y)$  هستند. تبدیل فوریه طرفین رابطه (۶) عبارتست از [۳]:

$$V(p, q) = e^{-(z-z_0)\sqrt{p^2+q^2}} V_0(p, q) \quad (7)$$

که در اینجا  $V(p, q)$  و  $V_0(p, q)$  به ترتیب تبدیل فوریه تابع  $V(x, y, z)$  و  $V(x, y, z_0)$  است. رابطه فوق، معادله انتقال رو به بالا را در فضای عددموج نشان می دهد. همانطور که انتظار می رود انتگرال کانولوتیو (۵) بصورت یک حاصلضرب در فضای عددموج در می آید. از سوی دیگر با توجه به ضرب شدن فاکتور  $e^{-(z-z_0)\sqrt{p^2+q^2}}$  در تبدیل فوریه  $V_0(p, q)$  انتظار میرایی و حذف عددموجهای بالا وجود دارد. این مساله خاصیت پایین گذر بودن پروسه انتقال رو به بالا را نشان می دهد. از رابطه (۷) برای انتقال رو به پایین نیز می توان بفرم زیر استفاده کرد. در این حالت

$$V_0(p, q) = e^{(z-z_0)\sqrt{p^2+q^2}} V(p, q) \quad (8)$$

با اعمال تبدیل فوریه معکوس می توان تابع  $V(x, y, z_0)$  را بدست آورد:

$$V(x, y, z_0) = F^{-1} \left[ e^{(z-z_0)\sqrt{p^2+q^2}} V(p, q) \right] \quad (9)$$

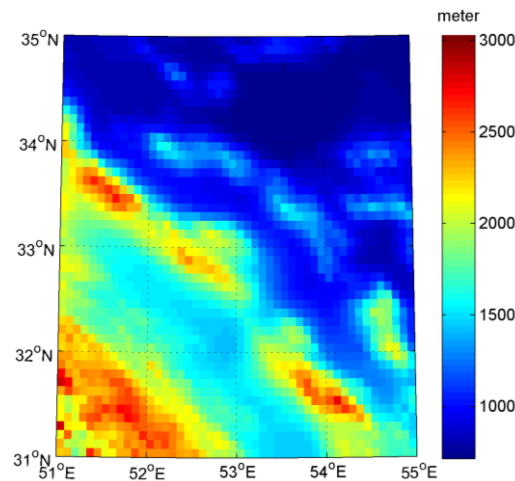
که  $F^{-1}$  تبدیل فوریه معکوس است.

#### ۴- آنالیز عددی

برای بررسی عددی نتایج انتقال رو به پایین از دو روش حل مستقیم انتگرال پواسن و استفاده از تبدیل فوریه، یک منطقه تست کوهستانی در ایران انتخاب گردید. این ناحیه محدود به عرض جغرافیایی  $34^\circ$  و  $39^\circ$  درجه و طول جغرافیایی  $48^\circ$  و  $53^\circ$  درجه است. شکل (۱) وضعیت توپوگرافی منطقه آزمون را نشان می دهد. با توجه به عدم امکان اندازهگیری شتاب ثقل روی ژئوئید (داخل توپوگرافی) از نتایج شبیه سازی شده توسط مدل ژئوپتانسیل<sup>۱</sup> (EGM08) تا درجه و مرتبه ۲۱۹۰ سود برده شد. برای اجتناب از ناپایداری احتمالی در حل معادلات انتگرالی و تبدیل فوریه، آنومالی های جاذبی متوسط روی گرید منظم با فاصله ۵ دقیقه کمانی محاسبه شد. این نرم افزار آنومالی جاذبی (هوای آزاد) را با تقریب کروی از رابطه بنیادی فیزیکی ژئودزی محاسبه می کند.

شعاع انتگرال گیری برای حل معادلات انتگرالی پواسن برابر یک درجه انتخاب گردید. با توجه به کوچکی اثر نواحی خارج از یک درجه (در حدود چند صد میکروگال)، از اعمال اثرات نواحی دوردست خودداری شده است که البته در مقایسه بین نتایج حاصل از معادله انتگرالی پواسن و تبدیل فوریه خللی وارد نمی کند. برای جلوگیری از اثر لبه ها (با توجه به شعاع انتگرال گیری برابر یک درجه) از آنومالی های جاذبی محاسبه شده در یک درجه مرزهای منطقه صرفنظر گردید.

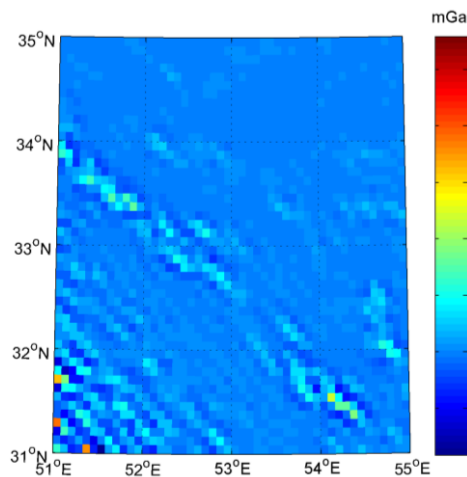
<sup>1</sup>. Earth Gravitational model 2008



شکل ۱: تغییرات توپوگرافی منطقه آزمون حاصل از ارتفاعات ارتومتریک بر حسب متر.

**Min= 715.271, Max= 3027.533, Mean= 1411.108, and RMS=1508.615 meter**

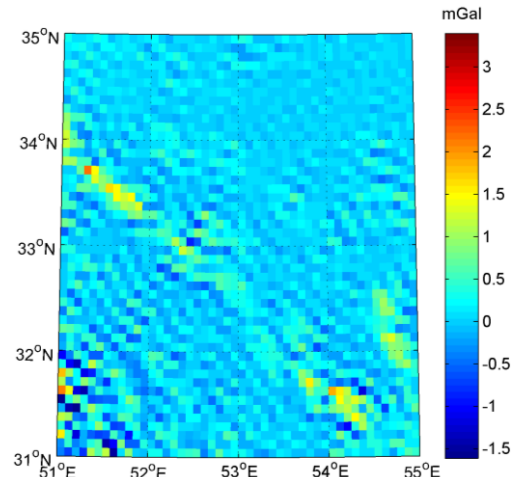
اشکال (۲) و (۳) به ترتیب خطای انتقال فروسوی روشهای حل عددی انتگرال و فوریه را نشان می دهد. بر اساس این اشکال روش فوریه دقت مناسب برای انتقال رو به پایین آنومالی های جاذبی را تامین نمی کند. با توجه به وضعیت توپوگرافی منطقه (شکل ۱)، خطای هر دو روش با توپوگرافی وابستگی مثبت دارد. بطوری که با افزایش ارتفاع، خطای انتقال رو به پایین افزایش پیدا می کند. با این وجود خطای روش فوریه در ارتفاعات به مقادیر بزرگ چند ده میلی گال هم می رسد. از عوامل عمده در بروز خطا در روش عددی می توان به خطای کرویت شبیه سازی داده ها توسط مدل EGM08، خطای گسسته سازی انتگرال پواسن و صرفنظر کردن از اثرات نواحی دوردست اشاره نمود.



شکل ۳: خطای انتقال فروسو در حل با تبدیل فوریه

بر حسب میلی گال.

**Min=-9.14, Max = 27.92, and RMS=1.52mGal**



شکل ۲: خطای انتقال فروسو در حل عددی انتگرال پواسن

بر حسب میلی گال.

**Min=- 1.61, Max= 3.39, and RMS= 0.34mGal**

### 5- نتیجه گیری

در این مقاله انتگرال پواسن به دو روش عددی و تبدیل فوریه برای انتقال فروسوی آنومالی های جاذبی بکار گرفته شد. روش عددی یک روش کارا برای حل انتگرال پواسن است. این روش براحتی برای انتقال فروسوی کمیت های متوسط و نقطه ای قابل تغییر است. اثر لبه ناشی از شعاع انتگرال گیری، نتایج انتقال فروسو را در مرزها دچار چالش



جدیمی کند که باید نتایج در این مناطق، از جواب نهایی کنار گذاشته شود. نتایج این مطالعه نشان داد که این روش دقت لازم برای انتقال فرسوی داده های گرانی را تامین می کند. در مقابل روش فوریه برای حل انتگرال پواسن که اغلب بعنوان یک فیلتر پایین گذر استفاده می شود، دارای سرعت بالا در محاسبات است. با این حال این روش نتایج قابل قبولی در انتقال فرسوی آنومالی های جاذبی در مناطق کوهستانی بدست نمی دهد. یکی از دلایل عمده در خطای این روش استفاده از کرنل نقطه ای پواسن بجای کرنل متوسط پواسن است. علاوه بر این خطاهای اجتناب ناپذیر تبدیل فوریه نظیر پدیده گیس و اثر leakage نیز بر دقت این روش تاثیرگذار است.

### منابع

- [1] Ardalan, "High resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000 based upon collocation of linearized observational functionals of the type GPS, gravity potential and gravity intensity", Ph.D Thesis, University of Stuttgart, 2000.
- [2] E. Fredholm, "Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet", Öfversigt af Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Vol. 131, pp. 39-46, 1900.
- [3] F. S. GRANT and G. F. WEST, *Interpretation theory in applied geophysics*. New York: McGraw-Hill Book Co., 1965.
- [4] J. Huang, "Computational Methods for the Discrete Downward Continuation of the Earth Gravity and Effect of Lateral Topographical Mass Density Variation on Gravity and the Geoid". Ph.D Thesis, UNB, Fredericton, 2002.
- [5] J. Huang, M. G. Sideris, P. Vaníček, and I. N. Tziavos, "Numerical investigation of downward continuation techniques for gravity anomalies", *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini*, vol. LXII, N.1, pp. 33-48, 2003.
- [6] J. Huang and M. Veronneau, "Applications of downward-continuation in gravimetric geoid modeling: case studies in Western Canada", *Journal of Geodesy*, vol. 79, pp. 135-145, 2005.
- [7] K. P. Schwarz, M. G. Sideris and R. Forsberg, "The use of FFT techniques in physical geodesy", *Geophysical Journal*, vol. 100, p. 485-514, 1990.
- [8] M. Goli, and M. Najafi-Alamdari, "Planar, spherical and ellipsoidal approximations of Poisson's integral in near zone", *Journal of Geodetic Science*, vol. 1, ed, p. 17, 2011.
- [9] M. Goli, M. Najafi-Alamdari, and P. Vaníček, "Numerical behaviour of the downward continuation of gravity anomalies", *Studia Geophysica at Geodaetica*, vol. 55, pp. 191-202, 01/04/1, 2011.
- [10] M. Goli, M. Najafi-Alamdari, and P. Vaníček, "Downward continuation of Helmert gravity anomaly to precise determination of geoid in Iran", *Journal of the Earth and Space Physics*, vol. 38, pp. 99-109, 11/21, 2012.
- [11] M. Goli, "Impact of gridding on stability of downward continuation of gravity anomaly", *Journal of Geomatics Science and Technology*, 2015.
- [12] Aslanifar, and V. Ardestani, "Calculation of downward continuation of the gravity data using iteration and Fourier transform methods", *Journal of the Earth and Space Physics*, vol. 7, 105-115, 2013.
- [13] P. Vaníček, W. Sun, P. Ong, Z. Martinec, M. Najafi, P. Vajda, and B. Ter Horst, "Downward continuation of Helmert's gravity", *Journal of Geodesy*, 71, 21-34, 1996.
- [14] R. J. Blakely, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press, 1996.



- [15] W. H. Heiskanen, and H. Moritz, *Physical geodesy*. San Francisco: W.H. Freeman and Co, 1967.
- [16] W. Sun, and P. Vaníček, "On some problems of the downward continuation of  $5' \times 5'$  mean Helmert's gravity disturbance", *Journal of Geodesy*, 72, 411-420, 1998.
- [17] W. Sun, "On Discrete Schemes in Downward Continuation of Gravity", *International Association of Geodesy*, Sapporo, Japan, pp. 512-5170, 2003.
- [18] Z. Martinec, "Stability investigations of a discrete downward continuation problem for geoid determination in the Canadian Rocky Mountains", *Journal of Geodesy*, Vol. 70. Springer, 1996.
- [19] Z. Martinec, and E. W. Grafarend, "Construction of Green's function to the external Dirichlet boundary-value problem for the Laplace equation on an ellipsoid of revolution", *Journal of Geodesy*, 71, 562-57, 1997.